PUBLICACIONES DE 4º CURSO

Grado: DERECHO-ADE

Asignatura: ECONOMETRÍA

Grupos: Único

Tema: ESQUEMA TEMA 2

Profesores: Inmaculada Villanúa

Departamento de ANÁLISIS ECONÓMICO

Curso Académico
2014/15

Facultad de
Economía y Empresa
Universidad Zaragoza

Tema 2: El Modelo Lineal General. Especificación y estimación.

3.1 Introducción e hipótesis del Modelo Lineal General.

3.2 Estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) de los parámetros del modelo. Propiedades.

3.3Estimación por Máxima Verosimilitud (MV) de los parámetros del modelo. Propiedades.

3.4 Estimación por intervalo.

3.5 Modelo Lineal General en desviaciones.

3.1. INTRODUCCIÓN E HIPÓTESIS BÁSICAS DEL MODELO

El MLG puede escribirse como:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

Alternativamente:

$$Y_i = \mathbf{x}_\mathbf{i}'\boldsymbol{\beta} + u_i \quad \left(i = 1, 2, \cdots T\right)$$

siendo $\mathbf{x}_\mathbf{i}' = \left(1 \; X_{2i} \; X_{3i} \; \cdots X_{ki}\right)$ y $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$

Además, existe una **tercera forma** de expresar el MLG, de forma concisa, para todos los individuos de la muestra:

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{pmatrix}; \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2T} & \cdots & X_{kT} \end{pmatrix}; \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_T \end{pmatrix}$$

HIPÓTESIS DEL MODELO LINEAL GENERAL

Hipótesis 1: Tanto la variable endógena (*Y*) como las exógenas ($X_2, \cdots, X_k$) son magnitudes cuyos correspondientes conjuntos de valores $(Y_1,\ldots,Y_T),(X_{21},\ldots,X_{2T}),(X_{31},\ldots,X_{3T}),\ldots,(X_{k1},\ldots,X_{kT})$ son el resultado de la observación de una muestra aleatoria simple de tamaño T.

Hipótesis 2: Relación lineal

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

ó bien

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{u}$$

donde $\mathbf{x\beta}$ es la parte sistemática, y $\mathbf{u}$ es la parte aleatoria.

Hipótesis 3: Esperanza matemática cero para cada una de las perturbaciones.

$$E(\mathbf{u}) = 0$$

El conjunto de variables individualmente irrelevantes se compensan en promedio, es decir, no actúan siempre en la misma dirección.

***Hipótesis 4*: (homoscedasticidad y no autocorrelación):** Todas las perturbaciones tienen la misma varianza y no presentan autocorrelación por pares.

$$V(\mathbf{u}) = E\left(\mathbf{u}\mathbf{u}'\right) = \sigma^2 \mathbf{I_T}$$

Hipótesis 5: Distribución normal de la perturbación aleatoria. Unida a las hipótesis 3 y 4 nos permite escribir:

$$\mathbf{u} \sim N\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I_T}\right)$$

Función de densidad:

$$f\left(\mathbf{u}\right) = f\left(u_1, \ldots, u_T\right) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{T/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{T} u_i^2\right)$$

Hipótesis 6*:* no hay ninguna restricción sobre los parámetros del modelo $\left(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, \sigma^2\right)$.

Hipótesis 7: la parte sistemática y la aleatoria son independientes.

$$C\mathrm{ov}\left(\mathbf{X}, \mathbf{u}\right) = 0$$

Supuesto más restrictivo: las *X* son fijas para muestras repetidas, esto es, los elementos de la matriz **X** son no estocásticos, fijos.

Hipótesis 8: El número de observaciones T ha de ser superior al número de parámetros k.

$$T > k$$

Hipótesis 9: Todas las variables explicativas son linealmente independientes (ausencia del multicolinealidad). Esto implica que el rengo de la matriz **X** es k:

$$r\left(\mathbf{X}\right) = k$$

De aquí se deriva que:

$$r\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right) = k \quad \text{y} \quad \left|\mathbf{X}'\mathbf{X}\right| \neq 0$$

Hipótesis 10 **(hipótesis de convergencia)**:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{T} = \Sigma_{\mathbf{xx}}$$

siendo $\Sigma_{\mathbf{xx}}$ una matriz de constantes.

Una vez definidas las hipótesis, podemos concluir la distribución del vector correspondiente a la variable endógena:

$$\mathbf{y} \sim N\left(\mathbf{x\beta}, \sigma^2 \mathbf{I_T}\right)$$

CÁLCULO DIFERENCIAL EN NOTACIÓN MATRICIAL

- ***Derivada parcial de una combinación lineal***

Si **x** y **a** son vectores de T variables y T constantes, respectivamente:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_T \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_T \end{pmatrix}$$

una combinación lineal de las T variables puede escribirse como:

$$\mathbf{x}'\mathbf{a} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_T X_T$$

Las derivadas parciales de la combinación lineal, con respecto a cada variable X_i serán:

$$\frac{\partial(\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial X_1} = a_1$$

$$\frac{\partial(\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial X_2} = a_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial(\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial X_T} = a_T$$

Esto puede escribirse de forma concisa como:

$$\frac{\partial(\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a} = \frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{a})}{\partial \mathbf{x}}$$

Si las derivadas las hacemos respecto a un vector fila $\mathbf{x}'$, entonces el resultado es un vector fila, esto es,

$$\frac{\partial(\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}'} = \mathbf{a}' = \frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{a})}{\partial\mathbf{x}'}$$

- ***Derivada parcial de una forma cuadrática***

Una forma cuadrática se define a partir de un vector columna, por ejemplo de T elementos, y una matriz simétrica, de orden T. Utilizando el mismo vector **x** anterior:

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1T} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{T1} & a_{T2} & \cdots & a_{TT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_T \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{T} a_{ii} X_i^2 + 2\sum_{i \neq j} a_{ij} X_i X_j$$

Si derivamos parcialmente esta última expresión respecto a cada X_i, obtenemos:

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial X_1} = 2\left(a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1T}X_T\right)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial X_2} = 2\left(a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2T}X_T\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial X_T} = 2\left(a_{1T}X_1 + a_{2T}X_2 + \cdots + a_{TT}X_T\right)$$

Si estos resultados los escribimos de conjuntamente en forma de vector columna, el resultado puede obtenerse también como:

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$$

Si derivamos respecto $\mathbf{x}'$ el resultado es un vector fila:

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}'} = 2\mathbf{x}'\mathbf{A}$$

3.2.- ESTIMACIÓN MCO DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO. PROPIEDADES.

3.2.1.- *PARÁMETROS DE POSICIÓN*

ESTIMACIÓN

Minimizar

$$S = \sum \hat{u}_i^2 = \sum \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = \sum \left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki}\right)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \Rightarrow -2\sum \left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki}\right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}_2} = 0 \Rightarrow -2\sum \left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki}\right) X_{2i} = 0$$

$$\cdots$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}_k} = 0 \Rightarrow -2\sum \left(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \cdots - \hat{\beta}_k X_{ki}\right) X_{ki} = 0$$

Las ecuaciones normales resultantes son:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\sum Y_i = T\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{ki} \\
&\sum Y_i X_{2i} = \hat{\beta}_1 \sum X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^2 + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{ki} X_{2i} \\
&\cdots \\
&\sum Y_i X_{ki} = \hat{\beta}_1 \sum X_{ki} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} X_{ki} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum X_{ki}^2
\end{aligned}}$$

Una manera alternativa de obtener las ecuaciones normales: escribir la función objetivo en **notación matricial**:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\sum \hat{u}_i^2 = \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$$

$$\text{Min} \quad S = \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)'\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) =$$

$$\mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}} = 0 \Rightarrow -2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}'} = 2\mathbf{X}'\mathbf{X} > 0 \qquad \text{(mínimo)}$$

Ecuaciones normales:

$$\boxed{\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}}$$

El vector de estimadores MCO:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{Y}\right)}$$

$$\mathbf{X'X} = \begin{pmatrix} T & \sum X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \cdots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X'y} = \begin{pmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \\ \vdots \\ \sum X_{ki}Y_i \end{pmatrix}$$

Propiedades derivadas de las ecuaciones normales:

$$\mathbf{X'\hat{u} = 0}$$

$$\mathbf{\hat{y}'\hat{u}} = 0$$

PROPIEDADES

- ***Propiedades para muestras finitas***

  a) <u>Lineales</u>

  $$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X'X}\right)^{-1}\mathbf{X'y} = \mathbf{A'y}$$

  siendo **A** una matriz de orden $k \times T$, que podemos escribir como:

  $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1T} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2T} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kT} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A'y} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1T} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2T} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{T} a_{1i} Y_i \\ \sum_{i=1}^{T} a_{2i} Y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{T} a_{ki} Y_i \end{pmatrix}$$

por lo que cada elemento del vector $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ puede escribirse como:

$$\hat{\beta}_j = \sum_{i=1}^{T} a_{ji} Y_i$$

b) <u>Insesgados</u>

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X'X}\right)^{-1}\left(\mathbf{X'y}\right) = \left(\mathbf{X'X}\right)^{-1}\mathbf{X'}\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}\right) =$$

$$\left(\mathbf{X'X}\right)^{-1}\mathbf{X'X}\boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X'X}\right)^{-1}\mathbf{X'u}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X'X}\right)^{-1}\mathbf{X'u}$$

$$E\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{\beta}$$

Por tanto $E\left(\hat{\beta}_j\right) = \beta_j \ \forall j = 1, \ldots, k$

Matriz de varianzas y covarianzas del vector de estimadores:

$$\boxed{\mathbf{V}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \sigma^2 \left(\mathbf{X'X}\right)^{-1}}$$

c) <u>ELIO</u>: estimadores lineales insesgados <u>óptimos</u>

d) <u>Eficientes</u>

➢ ***Propiedades asintóticas***

a) <u>Insesgadez asintótica</u>

b) <u>Consistencia</u>

Condiciones suficientes de consistencia:

$$\lim_{T\to\infty} E\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \boldsymbol{\beta}$$

$$\lim_{T\to\infty} V\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = 0$$

3.2.2.- *PARÁMETRO DE DISPERSIÓN*

ESTIMACIÓN

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{T-k} = \frac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{T-k}}$$

Objetivo que justifica esta expresión: obtener un estimador **<u>insesgado</u>** del parámetro de dispersión, teniendo en cuenta que

$$\frac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{T-k}$$

$$E\left(\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}\right) = \sigma^2 (T-k)$$

$$E\left(\hat{\sigma}^2\right) = \sigma^2$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{My}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{I_T} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

Propiedades de M: 1.Simétrica ($\mathbf{M} = \mathbf{M}'$)

2. Idempotente ($\mathbf{MM} = \mathbf{M}$)

3. $r(\mathbf{M}) = tr(\mathbf{M}) = T - k$

4. $\mathbf{MX} = 0$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Mu}$$

$$\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{y}'\mathbf{My} = \mathbf{u}'\mathbf{Mu}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}}{T - k}$$

PROPIEDADES

- ***Para muestras finitas***: sólo mantiene la insesgadez
- ***Asintóticas:*** asintóticamente insesgado y consistente.

$$\lim_{T\to\infty} E\left(\hat{\sigma}^2\right) = \sigma^2$$

$$\lim_{T\to\infty} \operatorname{var}\left(\hat{\sigma}^2\right) = 0$$

Obtención de la varianza

$$\frac{\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{T-k}$$

Resultado utilizado: distribuciones de formas cuadráticas (Trívez (2004), proposición 5, pag 121)

Si **x** es un vector que se distribuye como una $N(\mathbf{0},\mathbf{I})$ y A es una matriz simétrica e idempotente con rango y traza igual a r≤T, entonces:

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \sim \chi^2_r$$

Aplicación a nuestro caso: **u** es el vector $N(\mathbf{0},\sigma^2\mathbf{I})$ y $\mathbf{M}$ simétrica e idempotente:

$$\frac{\mathbf{u}'\mathbf{M}\mathbf{u}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{T-k}$$

$$\operatorname{var}\left(\hat{\sigma}^2\right) = \frac{2\sigma^4}{T-k}$$

Estimación de $V\left(\hat{\beta}\right)$:

$$\hat{V}\left(\hat{\beta}\right) = \hat{\sigma}^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}$$

3.3.- ESTIMACIÓN MV DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO. PROPIEDADES.

ESTIMACIÓN

$$\mathbf{y} \sim N\left(\mathbf{X\beta}, \sigma^2\mathbf{I}\right)$$

$$f\left(\mathbf{y}\right) = L\left(\mathbf{y}\middle|\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\right) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{T/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta}\right)'\left(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta}\right)\right\}$$

$$\ell = \ln L =$$

$$-\frac{T}{2}\ln\left(2\pi\right) - \frac{T}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X\beta}\right)$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X\beta}\right)$$

$$\frac{\partial\ell}{\partial\sigma^2} = -\frac{T}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\left(\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X\beta}\right)}{2\sigma^4} =$$

$$\frac{\left(\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X\beta}\right) - T\sigma^2}{2\sigma^4}$$

Igualando a cero ambas derivadas:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{X}'\mathbf{y} &= \mathbf{X}'\mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}} \\ \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\tilde{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \tilde{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}} &= T\tilde{\sigma}^2 \end{aligned}}$$

Conclusión:

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\tilde{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \tilde{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}}}{T} = \frac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{T}$$

PROPIEDADES

- ***Muestras finitas***
  - **Parámetros de posición**: lineales, insesgados, óptimos y eficientes.
  - **Parámetro de dispersión**: sesgado, no cumple ninguna propiedad en muestras pequeñas.

$$E\left(\tilde{\sigma}^2\right) = \frac{E\left(\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}\right)}{T} = \frac{\sigma^2\left(T-k\right)}{T} \neq \sigma^2$$

- ***Asintóticas***
  - **Parámetros de posición:** asintóticamente insesgados y consistentes.
  - **Parámetro de dispersión:** asintóticamente insesgado y consistente.

$$\lim_{T\to\infty} E\left(\tilde{\sigma}^2\right) = \sigma^2$$

$$\lim_{T\to\infty} \operatorname{var}\left(\tilde{\sigma}^2\right) = 0$$

$$E\left(\tilde{\sigma}^2\right)=\frac{\left(T-k\right)\sigma^2}{T}$$

$$\operatorname{var}\left(\tilde{\sigma}^2\right)=\frac{2\sigma^4\left(T-k\right)}{T^2}$$

3.4.- ESTIMACIÓN POR INTERVALO

3.4.1.- *PARÁMETROS DE POSICIÓN*

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}\sim N\left(\boldsymbol{\beta},\sigma^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\right)$$

$$\hat{\beta}_j\sim N\left(\beta_j,\sigma^2\left(X'X\right)_{jj}^{-1}\right)$$

$$\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\sqrt{\sigma^2\left(X'X\right)_{jj}^{-1}}}\sim N\left(0,1\right)$$

$$\frac{\dfrac{\left(\hat{\beta}_j-\beta_j\right)}{\sqrt{\sigma^2\left(X'X\right)_{jj}^{-1}}}}{\sqrt{\dfrac{\left(T-k\right)\hat{\sigma}^2/\sigma^2}{\left(T-k\right)}}}\sim t_{T-k}$$

Condición: independencia entre la N(0,1) y la χ^2_{T-k}.

Por tanto:

$$\frac{\left(\hat{\beta}_j - \beta_j\right)}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \sim t_{T-k}$$

$$\boxed{\hat{\beta}_j \pm t_{\varepsilon/2}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}}$$

3.4.2.- *PARÁMETRO DE DISPERSIÓN*

$$\frac{(T-k)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{T-k}$$

$$\boxed{\left[\frac{(T-k)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\varepsilon/2}}; \frac{(T-k)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\varepsilon/2}}\right]}$$

3.5.- EL MODELO LINEAL GENERAL EN DESVIACIONES

$$\begin{array}{l} \Leftarrow \\ \Downarrow \end{array} \begin{cases} Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i \\ \overline{Y} = \beta_1 + \beta_2 \overline{X}_2 + \cdots + \beta_k \overline{X}_k + \overline{u} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y_i = \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \left(u_i - \overline{u}\right)$$

$$y_i = x'_{di}\boldsymbol{\beta}^* + \left(u_i - \overline{u}\right)$$

donde $x'_{di} = \begin{pmatrix} x_{2i} & x_{3i} & \cdots & x_{ki} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{\beta}^* = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l} \Leftarrow \\ \Downarrow \end{array} \begin{cases} \hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} \\ \overline{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 + \cdots + \hat{\beta}_k \overline{X}_k \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki}$$

$$\hat{y}_i = x'_{di}\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$$

Expresión matricial:

$$\boxed{\hat{\mathbf{y}}_d = \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}}^*}$$

$$\mathbf{y}_d = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}_d = \begin{pmatrix} x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{2T} & \cdots & x_{kT} \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u_1 - \overline{u} \\ u_2 - \overline{u} \\ \vdots \\ u_T - \overline{u} \end{pmatrix}$$

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} + \hat{u}_i$$

$$\overline{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \overline{X}_2 + \cdots + \hat{\beta}_k \overline{X}_k$$

$$y_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki} + \hat{u}_i$$

$$y_i = \mathbf{x}'_{di} \hat{\beta}^* + \hat{u}_i$$

$$\boxed{\mathbf{y}_d = \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}}^* + \hat{\mathbf{u}}}$$

siendo $\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_T \end{pmatrix}$

$$\text{S}=\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \left(\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}}^*\right)' \left(\mathbf{y}_d - \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}}^*\right) = \mathbf{y}'_d \mathbf{y}_d - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime} \mathbf{X}'_d \mathbf{y}_d + \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*\prime} \mathbf{X}'_d \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}}^*$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{\beta}^*} = 0 \qquad \mathbf{X}'_d \mathbf{y}_d = \mathbf{X}'_d \mathbf{X}_d \hat{\boldsymbol{\beta}}^*$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = \left(\mathbf{X}'_d \mathbf{X}_d\right)^{-1} \mathbf{X}'_d \mathbf{y}_d}$$